TWIERDZENIA LIMITACYJNE [1]

Roman Murawski
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki
rmur@amu.edu.pl

Streszczenie

Przez twierdzenia limitacyjne rozumie się w logice i podstawach matematyki cztery następujące twierdzenia: twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego, pierwsze i drugie twierdzenie Gödla o niezupełności, twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy i twierdzenie Churcha o nierozstrzygalności rachunku predykatów. W pracy omawia się implikacje tych twierdzeń i ich znaczenie dla logiki, podstaw matematyki i filozofii matematyki.

Słowa kluczowe: logika pierwszego rzędu, model, nierozstrzygalność, kategoryczność, prawda
Key words: first order logic, model, undecidability, categoricity, truth

Od czasów Platona, Arystotelesa i Euklidesa za najlepszą metodę uzasadniania i organizacji wiedzy matematycznej uznawana jest metoda aksjomatyczna. Wzorcem tej metody są *Elementy* Euklidesa. Ustanowiły one pewien paradygmat w matematyce oraz wzorzec teorii naukowej, podziwiany i naśladowany. Od czasów Euklidesa aż do końca XIX wieku matematyka była w zasadzie uprawiana i przedstawiana w postaci teorii aksjomatycznej (w praktyce raczej quasi-aksjomatycznej) opartej na – zgodnie z zasadami metodologicznymi wypracowanymi przez Arystotelesa – aksjomatach, postulatach i definicjach. Zgodnie z tym wzorcem podstawową metodę uzasadniania w matematyce stanowi dowód. Każde twierdzenie powinno zostać udowodnione; dowód jest właściwie jedyną używaną i akceptowaną metodą przekonania innych, czy to słuchaczy, czy czytelników o prawdziwości danej tezy. Tylko stwierdzenia zaopatrzone w dowód mogą być zaliczone do korpusu wiedzy matematycznej. Ani autorytet, ani eksperyment nie są tu dopuszczalne czy akceptowalne. W praktyce metoda ta była raczej nieścisła – teorie formułowane były w języku potocznym, nie było ściśle sformułowanych i określonych zasad i reguł dowodzenia. Sytuacja zmieniła się na

[1] Praca powstała w ramach projektu badawczego Narodowego Centrum Nauki, grant nr N N101 136940.

przełomie XIX i XX wieku dzięki powstaniu i rozwojowi logiki matematycznej. Wprowadzono wtedy sformalizowane systemy aksjomatyczne, które dostarczały ścisłych i precyzyjnych ram budowania teorii matematycznych i pozwoliły na uściślenie i sprecyzowanie pojęcia dowodu. Niestety pojawiły się pewne trudności związane z ograniczeniami (formalizmu) logiki elementarnej, zwanej też logiką I rzędu. O nich właśnie mówią tytułowe twierdzenia limitacyjne. Mianem tym określa się twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego, pierwsze i drugie twierdzenie Gödla o niezupełności, twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności pojęcia prawdy i twierdzenie Churcha o nierozstrzygalności rachunku predykatów.

Wyjaśnijmy na początek, że przez logikę I rzędu rozumiemy rachunek predykatów I rzędu, tzn. system, w którym mamy zmienne indywiduowe jednego rodzaju i w którym kwantyfikacja odbywać się może jedynie względem tych zmiennych, a nie na przykład względem predykatów czy zbiorów. Jest to standardowy system logiki służący do formalizacji wszystkich (prawie) teorii matematycznych. Co więcej, posiada on pożądane własności metamatematyczne, w szczególności własność pełności, o której mówi **twierdzenie** Gödla **o pełności**, udowodnione przez niego w rozprawie doktorskiej (1929), a głoszące, że

> formuła A jest twierdzeniem teorii T wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa w każdym modelu (aksjomatów) teorii T,

czy, w innym sformułowaniu,

> teoria T jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy ma model (przeliczalny).

Pokazuje więc ono, że środki logiki I rzędu są w pewnym sensie wystarczająco bogate, że opis syntaktyczny jest w jakimś sensie równoważny z opisem semantycznym i że pojęcie dowodu (sformalizowanego) adekwatnie wyjaśnia pojęcie wynikania (oba te pojęcia są sobie równoważne). Pokazuje też (w drugim sformułowaniu), że każda niesprzeczna teoria posiada model w zbiorze liczb naturalnych, innymi słowy: „liczby naturalne stanowią komplet aktorów nadających się do obsadzenia i odegrania wszystkich ról przewidzianych w dowolnym niesprzecznym scenariuszu (napisanym w języki I rzędu)” (Batóg 2003, s. 282).

Przejdźmy teraz do tytułowych twierdzeń limitacyjnych. Mówią one co następuje:

Twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego (1915 - 1928): Teoria I rzędu ma model przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy ma model dowolnej mocy nieskończonej.

Pierwsze twierdzenie Gödla o niezupełności (1931): Każda teoria niesprzeczna T zawierająca w sobie arytmetykę liczb naturalnych jest istotnie niezupełna, tzn. istnieją zdania nierozstrzygalne w niej; własność tę ma też każde niesprzeczne rozszerzenie teorii T.

Drugie twierdzenie Gödla o niezupełności (1931): W żadnej teorii niesprzecznej T zawierającej arytmetykę liczb naturalnych nie można dowieść jej własnej niesprzeczności – wymaga to środków silniejszych niż teoria T.

Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności pojęcia prawdy (1933): Jeśli teoria T jest niesprzeczna, to nie istnieje w niej definicja prawdziwości, tzn. zbiór zdań prawdziwych teorii T nie jest definiowalny w T.

Twierdzenie Churcha o nierozstrzygalności rachunku predykatów (1936): Klasyczny rachunek predykatów I rzędu jest nierozstrzygalny.

Twierdzenia te mają daleko idące konsekwencje dla logiki, podstaw matematyki oraz dla filozofii matematyki. Mają także konsekwencje dla filozofii ogólnej. Tu jednak sprawa nie jest taka prosta – wiele zależy bowiem od interpretacji. Nie będziemy tu więc obszerniej mówili o konsekwencjach ogólnofilozoficznych (poczynimy tylko kilka uwag ogólnych), a skoncentrujemy się na tych pierwszych.

O konsekwencjach dla filozofii ogólnej piszą w szczególności J. Woleński (2009) i Krajewski (2003). Według Woleńskiego

> konkluzje filozoficzne wysnuwane z twierdzeń fizyki lub matematyki, w tym zwłaszcza metamatematyki, nie są po prostu logicznymi (dedukcyjnymi) konsekwencjami tych drugich, ale rezultatami nader skomplikowanych rozumowań. […] filozoficzna elaboracja wyniku naukowego zawsze wymaga pewnej dozy hermeneutyki […]. Konsekwencje twardych wyników naukowych […] uzyskane za pomocą wykładni hermeneutycznej, można nazwać interpretacyjnymi. […] Rezultaty zanurzenia teorii naukowych w kontekst filozoficzny są raczej stosownymi parafrazami, a nie przekładami na język nauki w normalnym rozumieniu tej operacji. (2009, s. 209-210)

Ponieważ takie zanurzenie zależy od wielu czynników – jak na przykład tradycja, wykształcenie, światopogląd, oczekiwania – więc te same wyniki naukowe mogą prowadzić do różnych, często rozbieżnych wniosków filozoficznych. Nierzadko też przy wyciąganiu wniosków ogólnofilozoficznych nie zwraca się uwagi na ścisłe założenia, przy których zachodzą dane wyniki i próbuje się wyciągać z nich wnioski nawet wtedy, gdy założenia te nie są czy wręcz nie mogą być spełnione. Czasami też dokonuje się nieuzasadnionych ekstrapolacji podawanych interpretacji wyników naukowych. O takich próbach w odniesieniu do twierdzeń Gödla mówi na przykład Krajewski (2003).

Zanim przejdziemy do dyskusji implikacji twierdzeń limitacyjnych dla logiki, podstaw matematyki oraz filozofii matematyki poczynimy kilka uwag wyjaśniających.

Kiedy mówimy o teorii I rzędu mamy na myśli teorię sformalizowaną w języku I rzędu i opartą na klasycznym rachunku predykatów I rzędu (czyli na logice klasycznej, dwuwartościowej). W każdym takim języku mamy przeliczalnie wiele zmiennych indywiduowych, predykatów, stałych indywiduowych i symboli funkcyjnych, za pomocą których budujemy formuły będące skończonymi ciągami symboli. Nie dopuszczamy więc wyrażeń nieskończenie długich ani większych niż przeliczalne list symboli wyjściowych. W rozumowaniach (dowodach formalnych) przeprowadzanych w takich teoriach opieramy się na regułach wnioskowania (inferencji) klasycznej logiki I rzędu, czyli w szczególności na regułach finitarnych o skończenie wielu (w praktyce jednej lub dwóch) przesłankach. Są to pewne ograniczenia, ale są one zgodne z potocznym, niesformalizowanym pojęciem teorii i rozumowania/wnioskowania i z praktyką badawczą, którą logika ma formalizować. Dodajmy, że w logice bada się systemy, w których dopuszcza się bogatsze języki lub języki z wyrażeniami o nieskończonej długości czy systemy, w których dedukcja oparta jest także na infinitarnych (o nieskończonej liczbie przesłanek) regułach wnioskowania. Systemy te są jednak dalekie od praktyki badawczej, są z jej punktu widzenia sztuczne. Mają też czasami zadziwiające własności. Bada się systemy oparte na językach i logice II i wyższych rzędów, w których kwantyfikacja może odnosić się nie tylko do indywiduów, ale także do obiektów wyższego rzędu, na przykład zbiorów indywiduów, zbiorów zbiorów indywiduów itd. Systemy takie nie mają jednak ładnych i pożądanych własności metamatematycznych; na przykład nie mają własności pełności.

Twierdzenia limitacyjne pokazują przede wszystkim pewne ograniczenia metody aksjomatyczno-dedukcyjnej opartej na logice I rzędu. W szczególności pokazują one pewne nieprzystawanie, nieadekwatność składni (syntaksy) i semantyki. Twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego pokazuje, że teorie I rzędu nie są kategoryczne, tzn. jeśli są niesprzeczne (a jest to założenie naturalne, wierzymy w ich niesprzeczność), to mogą mieć modele bardzo różnych mocy. Oznacza to, że nie można jednoznacznie (nawet tylko z dokładnością do izomorfizmu) scharakteryzować danej dziedziny, na przykład dziedziny liczb naturalnych. W szczególności aksjomatyczna arytmetyka liczb naturalnych może mieć obok modelu zamierzonego zwanego modelem standardowym, czyli modelu $\mathbf{N} = \langle N, 0, S, +, \cdot \rangle$, gdzie N oznacza zbiór liczb naturalnych 0,1,2,3,…, wiele innych modeli (zwanych modelami niestandardowymi), także modeli o mocy nieprzeliczalnej. Nic nie pomoże tu wzmacnianie zbioru aksjomatów – zawsze będzie ten sam fenomen, o ile tylko pozostajemy na gruncie logiki I rzędu. Jeśli przejść do logiki II rzędu, to ten niepożądany fenomen znika, ale kosztem pewnych ograniczeń. Dodajmy, że sytuacja jest jeszcze bardziej skomplikowana, a mianowicie arytmetyka liczb naturalnych ma oprócz modelu standardowego (przeliczalnego) także modele przeliczalne niestandardowe, a więc inne niż standardowy (nieizomorficzne z nim).

Z kolei arytmetyka liczb rzeczywistych sformalizowana w logice I rzędu ma też modele przeliczalne, mimo że opisywać ma strukturę nieprzeliczalną. Wynika to z faktu, że w języku takiej teorii może być tylko przeliczalnie wiele symboli, a zatem w konsekwencji nie może być nieprzeliczalnie wielu nazw indywiduowych, czyli w szczególności nazwy dla każdej liczby rzeczywistej.

Więcej jeszcze: teorie, które mają opisywać struktury (światy) bardzo nieskończone, jak teoria mnogości, mają w świetle twierdzenia Löwenheima-Skolema-Tarskiego także modele przeliczalne (fenomen ten nazywa się w literaturze paradoksem Skolema). Zatem w modelu takim zbiór liczb rzeczywistych, o którym dowodzi się, że jest nieprzeliczalny, będzie interpretowany jako obiekt w istocie przeliczalny. Inaczej: z punktu widzenia rozważanego przeliczalnego modelu teorii mnogości będzie on nieprzeliczalny (czyli w modelu tym nie będzie istniała funkcja odwzorowująca go jednojednoznacznie na zbiór liczb naturalnych N), ale patrząc z zewnątrz będzie on przeliczalny, bo cały model jest przeliczalny. Wskazuje to na małą siłę wyrazu języków I rzędu.

Widzimy więc, że żadna teoria sformalizowana I rzędu nie wyznacza jednoznacznie swojego modelu czy dziedziny, którą opisuje czy którą ma opisywać. Teorie takie mają na ogół wiele różnych modeli, w tym modele inne niż zamierzone. A zatem zaksjomatyzowanie i sformalizowanie teorii nie daje żadnych precyzyjnych informacji na temat tego, czym są opisywane przez nią obiekty i co dana teoria właściwie opisuje. Aksjomaty teorii dają informację jedynie o zależnościach między obiektami, a nie na temat ich natury.

Przejdźmy teraz do twierdzeń Gödla o niezupełności. Należy na nie patrzeć w świetle programu Hilberta, którego celem było – wobec wykrytych w końcu XIX wieku antynomii i paradoksów – ugruntowanie całej matematyki klasycznej (operującej pojęciem nieskończoności aktualnej). Hilbert chciał tego dokonać za pomocą bezpiecznych metod finitystycznych operujących tylko obiektami skończonymi, bezpośrednio i naocznie danymi. Narzędziem w tych badaniach miały być sformalizowane systemy aksjomatyczne oparte na klasycznej logice I rzędu. Należało całą matematykę przedstawić jako system sformalizowany i następnie – abstrahując od treści stwierdzeń (semantyka), a badając tylko kształt wyrażeń (składnia) – dowieść ich zupełności i niesprzeczności, tzn. tego, że przyjęte aksjomaty stanowią wystarczającą bazę, w oparciu o którą można rozstrzygnąć każdy problem dający się sformułować w języku danej teorii oraz że nie są one sprzeczne, czyli że nie można w nich dowieść pary zdań sprzecznych. Dodajmy, że sprzeczność dyskwalifikuje teorię, ponieważ – zgodnie z prawem Dunsa Scota – można w niej wtedy dowieść każdego zdania, staje się więc bezużyteczna jako teoria.

Twierdzenie o pełności udowodnione przez Gödla w jego pracy doktorskiej budziło nadzieje, że program Hilberta uda się zrealizować – pokazywało bowiem, że system logiki jest w pewnym sensie wystarczająco bogaty i zawiera wystarczające środki, by móc w nim zrekonstruować wszelkie potoczne dowody występujące w praktyce badawczej matematyków. Nadzieje te zburzyły jednak twierdzenia o niezupełności udowodnione przez Gödla niewiele później.

Pierwsze twierdzenie Gödla pokazuje, że nigdy nie uda się sformułować zupełnego układu aksjomatów dla żadnej ciekawszej teorii sformalizowanej, tzn. teorii zawierającej arytmetykę liczb naturalnych. W każdej bowiem takiej teorii, niezależnie od tego na jak silnych aksjomatach opartej, zawsze będą istniały zdania nierozstrzygalne, czyli stwierdzenia sformułowane w języku danej teorii, których w oparciu o przyjęte aksjomaty nie można ani dowieść, ani obalić (czyli dowieść ich negacji). Warunkiem jest tutaj to, by układ aksjomatów tworzył zbiór rekurencyjny, tzn. by istniała efektywna metoda (algorytm) pozwalająca rozstrzygać, co jest aksjomatem, a co nim nie jest. Jest to całkiem naturalne żądanie i wszystkie aksjomatyczne teorie matematyczne spotykane w praktyce badawczej je spełniają. Nic też nie da rozszerzanie aksjomatyki (na przykład przez dołączenie do aksjomatów zdania nierozstrzygalnego), gdyż wtedy w tej nowej, rozszerzonej teorii pojawią się nowe zdania nierozstrzygalne, czyli będzie ona też niezupełna.

Pierwsze twierdzenie Gödla pokazuje zatem, że metoda aksjomatyczna nie daje pełnej wiedzy, że nie można całej matematyki zawrzeć w niesprzecznym systemie aksjomatycznym, więcej, nie można w żadnym takim systemie zawrzeć całości prawdy nawet o tak prostych zdawałoby się i podstawowych obiektach, jak liczby naturalne; nie można pojęcia liczby (naturalnej) adekwatnie zaksjomatyzować przez żadną teorię I rzędu. Mamy zatem do czynienia ze zjawiskiem swoistej niewyczerpywalności zasobu prawd matematycznych, a nawet prawd arytmetycznych dotyczących liczb naturalnych. Zawsze bowiem istnieć będą zdania nierozstrzygalne. Jak pisał Carnap: „*wszystko w matematyce można sformalizować, ale matematyki nie można wyczerpać za pomocą jednego systemu*; przeciwnie wymaga ona szeregu coraz to bogatszych języków" (1934, s. 274).

Z drugiej strony stosując pewne metody wychodzące poza środki dowodowe dopuszczalne w danej teorii, w szczególności w przypadku arytmetyki liczb naturalnych – metody teorii mnogości, czyli metody używające nieskończoności – można zdania nierozstrzygalne rozstrzygnąć. Pokazuje to, że konieczne bywa stosowanie metod nieskończonych nawet przy dowodzeniu twierdzeń o obiektach skończonych, jak liczby naturalne.

Własność niezupełności znika też – przynajmniej w przypadku arytmetyki liczb naturalnych – jeśli dopuścić w dowodach infinitarne, tzn. dopuszczające nieskończone układy przesłanek reguły wnioskowania (tzw. ω–regułę). Ale znów pojawia się tu nieskończoność!

Pierwsze twierdzenie Gödla pokazuje też, że dowodliwość w systemie aksjomatycznym nie pokrywa się z prawdziwością. Istotnie, każde twierdzenie na przykład arytmetyki sformalizowanej jest prawdziwe (w każdym modelu teorii, w szczególności w modelu zamierzonym, czyli modelu standardowym), ale nie na odwrót, tzn. istnieją zdania prawdziwe w modelu standardowym, których nie można dowieść w oparciu o środki danej teorii, czyli zdania nierozstrzygalne. A zatem pojęcia prawdziwości semantycznej nie można adekwatnie wyrazić w terminach prawdziwości syntaktycznej, czyli dowodliwości. Można powiedzieć, że pojęcie prawdy transcenduje pojęcie dowodu, że składnia (syntaksa) jest słabsza i uboższa niż semantyka.

Innym wnioskiem z pierwszego twierdzenia Gödla jest też to, że nie można *a priori* ograniczać metod stosowanych i dopuszczalnych w matematyce (ustalony zbiór aksjomatów), nie można ograniczać twórczej inwencji matematyków. Jak ujął to E. Post: „[…] *myślenie matematyczne jest i musi pozostać zasadniczo twórcze*, nawet w odniesieniu do tak [jak arytmetyka liczb naturalnych – R.M.] ustalonego i dobrze określonego zespołu sądów matematycznych" (1944, s. 316).

Pierwsze twierdzenie Gödla rzuca też pewne światło na problem związków między dowodami formalnymi (w ramach danej aksjomatycznej teorii sformalizowanej) a tym, co matematycy nazywają dowodami i z czym mamy do czynienia w praktyce badawczej matematyków (dowody nieformalne, czy raczej argumentacja mająca na celu przekonanie słuchacza czy czytelnika o słuszności, czy prawdziwości głoszonej tezy, a więc coś o charakterze psychologicznym a nie ściśle logicznym). Twierdzenie Gödla pokazuje, że precyzyjne pojęcie dowodu formalnego nie jest adekwatnym i ścisłym odpowiednikiem potocznego pojęcia dowodu.

Drugie twierdzenie Gödla o niezupełności pokazało, że nie można w danej teorii (spełniającej stosowne, naturalne przecież warunki) udowodnić jej własnej niesprzeczności, gdyż dla dowodu niesprzeczności teorii T potrzebne są środki znacznie silniejsze niż te dopuszczalne w T, zatem jeszcze mniej pewne (i bardziej „podejrzane"). W szczególności nie można dowieść niesprzeczności matematyki klasycznej operującej pojęciem nieskończoności aktualnej za pomocą środków finitystycznych – jak chciał Hilbert. Programu Hilberta nie da się więc zrealizować w oryginalnej postaci. Nie zmienia tego faktu to, że dla prawdziwości drugiego twierdzenia Gödla konieczne są pewne założenia nakładające określone warunki na formuły wyrażające w języku teorii metamatematyczną własność niesprzeczności (tzw. *derivability conditions* – por. na przykład Murawski 2010). Dodajmy też przy okazji, że w ramach programu badawczego tzw. matematyki odwrotnej pokazano, że możliwa jest częściowa realizacja programu Hilberta (por. Murawski 1993).

Nie istnieją więc żadne absolutne dowody niesprzeczności. Możliwe są jedynie dowody relatywnej niesprzeczności typu: jeśli teoria T_1 jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest też teoria T_2. Z drugiej strony niesprzeczność jest jednym z najbardziej istotnych warunków w matematyce (mającym także implikacje ontologiczne, skoro często przyjmuje się, że niesprzeczność implikuje istnienie). W konsekwencji uprawiając matematykę i nie dysponując (absolutnymi) dowodami niesprzeczności zdani jesteśmy na wiarę, że rozwijane teorie są niesprzeczne. Wiara ta opierać się może jedynie na fakcie, że jak dotąd sprzeczności matematyki nie pokazano, a zawsze, gdy pojawiały się jakieś sprzeczności czy paradoksy, potrafiono znaleźć sposoby ich eliminacji.

Twierdzenia Gödla o niezupełności mają też związek z problemami sztucznej inteligencji. Można mianowicie pytać o to, czy umysł ludzki działa tak, jak maszyna (komputer), czy pracę matematyka można zastąpić pracą komputera? Jeśli założymy, że komputer (maszyna) działa tak, jak sformalizowany system aksjomatyczny (a założenie to wydaje się sensowne i uzasadnione), to odpowiedź powinna brzmieć: „Nie, nie można twórczej pracy umysłu matematyka zastąpić w pełni pracą maszyny (komputera)". Twierdzenia Gödla pokazując pewne granice możliwości poznawczych metody aksjomatycznej wskazują też na pewne ograniczenia możliwości maszyn (komputerów). Ale czy pokazują też granice możliwości poznawczych człowieka? Umiemy przecież rozstrzygać zdania nierozstrzygalne w danym systemie aksjomatycznym, dobierając stosowne silniejsze środki (aksjomaty czy reguły inferencji). Zatem odpowiedź powinna być raczej negatywna. Ale czy człowiek jest w stanie odpowiedzieć na każde pytanie? Czy też istnieją problemy i zdania absolutnie nierozstrzygalne?

Przejdźmy teraz do kolejnego twierdzenia limitacyjnego, a mianowicie do twierdzenia Tarskiego o niedefiniowalności pojęcia prawdy. Wynika z niego w szczególności, że zbiór arytmetycznych zdań prawdziwych, czyli tych zdań języka arytmetyki liczb naturalnych, które są prawdziwe w modelu zamierzonym (standardowym) nie jest definiowalny w języku arytmetyki. Pojęcie prawdy arytmetycznej nie jest arytmetycznie definiowalne. I podobnie dla innych teorii. To pokazuje także „przepaść" między podejściem syntaktycznym (dowodliwość) i podejściem semantycznym (prawdziwość): zbiór prawdziwych zdań arytmetycznych nie jest definiowalny w języku arytmetyki, podczas gdy zbiór zdań dowodliwych (twierdzeń) jest definiowalny prostą formułą (używającą jednego tylko kwantyfikatora, dokładniej kwantyfikatora egzystencjalnego). Znów widzimy więc, że pojęcie prawdy transcenduje środki syntaktyczne.

Ostatnie z rozważanych twierdzeń limitacyjnych to twierdzenie Churcha o nierozstrzygalności logiki I rzędu, czyli rachunku predykatów. Mówi ono mniej więcej tyle, że nie istnieje żadna efektywna metoda (algorytm), która pozwalałaby w skończonej liczbie prostych, mechanicznych, z góry określonych kroków rozstrzygać, czy dane wyrażenie jest tezą logiki (tautologią), czy nie. Podkreślmy, że nie chodzi tu o znajdowanie dowodu rozważanej formuły, ale o rozstrzyganie, czy jest twierdzeniem (bez konieczności znajdowania dowodu). Dodać należy, że pewne fragmenty logiki I rzędu są rozstrzygalne, tzn. istnieje dla nich taka metoda. Nie istnieje ona jednak dla pełnego systemu takiej logiki, a ten jest potrzebny w szczególności dla formalizacji i aksjomatyzacji teorii.

Problematyka rozstrzygalności teorii dotyczy zresztą nie tylko samej logiki, ale też teorii zbudowanych w oparciu o nią, czyli sformalizowanych teorii aksjomatycznych. W szczególności badania Gödla, Churcha, Tarskiego i wielu innych pokazały, że większość interesujących teorii matematycznych jest nierozstrzygalna lub nawet istotnie nierozstrzygalna, tzn. taka, że każde niesprzeczne rozszerzenie takiej teorii zachowujące język jest też nierozstrzygalne (por. Murawski 2010). Taka jest w szczególności arytmetyka liczb naturalnych. Więcej nawet, można pokazać, że nie da się w sposób efektywny (algorytmiczny) oddzielić zbioru twierdzeń arytmetyki i zbioru tych zdań arytmetycznych, których negacje są twierdzeniami arytmetyki, czyli zbioru twierdzeń i zbioru formuł, które można obalić w oparciu o aksjomaty arytmetyki.

Nie można więc rozstrzygnąć w sposób efektywny, czy rozważany przez nas problem da się rozwiązać w oparciu o aksjomaty badanej teorii, czy da się go rozwiązać środkami dostępnymi w tej teorii. Pozostaje więc jedynie szukanie rozwiązania. Jeśli je znajdziemy, to będziemy wiedzieli, że jest on rozstrzygalny i daje się rozwiązać na gruncie danej teorii i za pomocą jej środków, a jeśli nie uda się znaleźć, to możemy jedynie stwierdzić, że jak dotąd nasze próby nie dały rezultatu, ale nie wiemy czy warto szukać dalej, czy też nasze wysiłki skazane są na niepowodzenie, bo problem jest nierozwiązywalny/nierozstrzygalny.

Dokładne badania pokazały, że choć arytmetyka liczb naturalnych w języku z operacją dodawania i mnożenia jest niezupełna i istotnie nierozstrzygalna, to jej fragmenty, w szczególności arytmetyka samego tylko dodawania i arytmetyka samego tylko mnożenia są zupełne i rozstrzygalne. Stanowi to jednak niewielką pociechę, gdyż odpowiednie algorytmy, które mogłyby rozstrzygać, czy dane zdanie jest twierdzeniem czy nie, są bardzo złożone i praktycznie nierealizowalne (mają złożoność „mocno" wykładniczą, tzn. liczba niezbędnych kroków, które trzeba wykonać, by rozstrzygnąć, czy dane zdanie jest twierdzeniem czy nie zależy w sposób wykładniczy od długości rozważanego zdania, a funkcja wykładnicza rośnie bardzo szybko!) (por. Murawski 2010).

* * * * *

Twierdzenia limitacyjne wskazują na pewne ograniczenia logiki I rzędu i budowanych w oparciu o nią sformalizowanych systemów aksjomatycznych. Zburzyły one nadzieje logików na znalezienie narzędzia, które pozwoliłoby w sposób ścisły, precyzyjny i obiektywny ujmować relacje wynikania, badać proces uzasadniania i porządkować w ten sposób naszą wiedzę. Co więcej, nie mamy żadnego innego narzędzia, które by to umożliwiało. Warto jednak zwrócić uwagę na pewien pozytywny aspekt. Otóż dzięki metamatematycznym wynikom badań z zakresu logiki i podstaw matematyki zdajemy sobie jasno sprawę z ograniczeń rozważanych metod, co więcej, potrafimy w sposób ścisły te ograniczenia opisać i uzasadnić. Świadomi ograniczeń wiemy też, że inne narzędzia w postaci na przykład systemów logiki II rzędu, choć wolne od ograniczeń logiki elementarnej, mają inne wady, tzn. nie przysługują im pewne pozytywne i pożądane cechy logiki I rzędu.

Bibliografia

Batóg, T. (2003), *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, wydanie IV.

Carnap, R. (1934), Die Antonomien und die Unvollständigkeit der Mathematik, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 41, 263-284.

Krajewski, S. (2003), *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu*, Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa.

Murawski, R. (1993), Rozwój programu Hilberta, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, Seria II: *Wiadomości Matematyczne* 30 , 51-72.

Murawski, R. (2010), *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, wydanie IV.

Post, E. (1944), Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems, *Bulletin of the American Mathematical Society* 50, 284-316; przedruk w: M. Davis (Ed.), *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, New York, 305-337.

Woleński, J. (1993), *Metamatematyka a epistemologia*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Woleński, J. (2005), *Epistemologia. Poznanie, prawda, wiedza, realizm*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Woleński, J. (2009), O filozoficznym sensie metamatematycznych twierdzeń limitacyjnych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, Seria II: *Wiadomości Matematyczne* 45, 195-216.

Abstract

Limitation Theorems

By limitation theorems one understands in logic and the foundations of mathematics the following theorems: Löwenhein-Skolem-Tarski theorem, Gödel's first and second incompleteness theorem, Tarski's theorem on the undefinablity of truth and Church's theorem on the undecidability of predicate calculus. In the paper implications and consequences of these theorems for logic, the foundations of mathematics as well as for the philosophy of mathematics will be discussed.

Nota o autorze

Roman Murawski, profesor zwyczajny na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, kierownik Zakładu Logiki Matematycznej. Zajmuje się logiką matematyczną i podstawami matematyki oraz filozofią matematyki i historią logiki. Bliższe informacje na stronie: http://www.logika.amu.edu.pl/murawski_dane.php