FUNDAMENTALNA ZASADA TEORII KWANTOWEJ

Zbigniew Jacyna-Onyszkiewicz
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Fizyki
Zakład Fizyki Kwantowej
zbigonys@amu.edu.pl

Streszczenie

W odróżnieniu od ogólnej teorii względności teoria kwantowa nie została sformułowana w oparciu o określoną, głęboką zasadę. Jej struktura matematyczna została odgadnięta w latach dwudziestych XX wieku na podstawie eksperymentów przeprowadzonych w skali atomowej. Jednak problem, czy podstawowa struktura matematyczna teorii kwantowej wynika z głębokiej zasady, pozostaje nadal otwarty. W artykule zaproponowano w charakterze takiej zasady rozszerzoną zasadę antropiczną. W oparciu o tę zasadę wyprowadzono podstawową strukturę formalizmu matematycznego teorii kwantowej.

Słowa kluczowe: teoria kwantowa, zasada antropiczna, rozszerzona zasada antropiczna, najprostszy układ kwantowy
Keywords: quantum theory, anthropic principle, extended anthropic principle, simplest quantum system

1. Wstęp

Teoria kwantowa stanowi podstawę teoretyczną fizyki kwantowej i fundament naszego rozumienia rzeczywistości fizycznej. Poprawność teorii kwantowej była wielorako i wielokrotnie potwierdzona z ogromną dokładnością w rozlicznych eksperymentach fizycznych. Opisuje ona perfekcyjnie zarówno cząstki elementarne, jak i obiekty duże. W tym drugim jednak przypadku osobliwości fizyki kwantowej zostają w dużym stopniu ukryte przez fakt, że obiekty duże składają się z przeogromnej ilości cząstek elementarnych i dochodzi w nich do głosu nieusuwalne oddziaływanie z otoczeniem. Wspaniała, bez najmniejszej skazy, zgodność wyników teorii kwantowej z doświadczeniem to jeden z największych triumfów nauki.

Teoria kwantowa obejmuje następujące działy fizyki teoretycznej: nierelatywistyczną i quasi-relatywistyczną mechanikę kwantową, kwantową teorię wielu ciał, termodynamikę kwantową, optykę kwantową, informatykę kwantową, różne warianty kwantowej teorii pola (w tym standardowy model cząstek elementarnych) oraz kosmologię kwantową.

Każdy z tych działów teorii kwantowej stosuje specyficzne metody, lecz wszystkie one wykorzystują wspólną podstawową strukturę formalizmu matematycznego teorii kwantów. Ta podstawowa struktura matematyczna teorii kwantowej nie została wyprowadzona z jakiejś głębokiej zasady, lecz była odgadnięta przez fizyków w drugiej połowie lat dwudziestych XX wieku, na podstawie eksperymentów spektroskopowych oraz doświadczeń przeprowadzonych na poziomie atomowym. Problem, czy podstawowa struktura matematyczna teorii kwantowej wynika z jakiejś fundamentalnej zasady jest nadal otwarty, dlatego zostanie w tym artykule rozpatrzony.

2. Wszechświat antropiczny

Zasada antropiczna oznacza globalną cechę wszechświata, odkrytą w latach siedemdziesiątych XX wieku, wskazującą na bardzo subtelne dostrojenie jego parametrów, bez którego życie nie mogłoby w nim zaistnieć i rozwijać się (Leciejewski, 2007). Takie dostrojenie jawi się jako warunek konieczny istnienia człowieka. Na przykład model standardowy cząstek elementarnych zawiera 18 parametrów: próżniową wartość pola Higgsa, stałe sprzężenia, stałe Yukawy, elementy macierzy mieszania kwarków (Cabbibo-Kabayashi-Maskawy), których wartości nie jesteśmy w stanie w jakikolwiek sposób wyjaśnić. Jednocześnie odpowiednie wartości tych parametrów są kluczowe dla naszego istnienia. Zmiana ich wartości w którąkolwiek stronę dawałaby wszechświat, w którym nie mogłoby istnieć życie ludzkie.

Subtelne dostrojenie parametrów wszechświata jest warunkiem koniecznym zaistnienia człowieka, lecz nie jest warunkiem dostatecznym, ponieważ człowiek nie tylko posiada ciało, opisywane przez biologię i medycynę, lecz także rozum, stanowiący o istocie człowieczeństwa. Rozum to przede wszystkim zdolność do rozumienia abstrakcyjnych pojęć i wypływających z nich wniosków oraz racjonalny osąd, a także wolna wola, polegająca na wolnym i racjonalnym podejmowaniu określonych decyzji (Jacyna-Onyszkiewicz, 2015). Wolna wola człowieka byłaby bezprzedmiotowa, gdyby człowiek w swoim życiu nie miał stałej możliwości działania odnośnie elementów fizycznych wszechświata. Z tego powodu przyjmujemy rozszerzoną zasadę antropiczną:

Człowiek musi mieć możliwość permanentnego działania we wszechświecie.

3. Rozszerzona zasada antropiczna a podstawowa struktura matematyczna teorii kwantowej

3.1. Najprostszy układ fizyczny

Żeby się przekonać, jakie konsekwencje wynikają z rozszerzonej zasady antropicznej rozpatrzmy możliwie najprostszy układ fizyczny doskonale izolowany od otoczenia, którego stan fizyczny opisuje wielkość fizyczna (obserwabla) α, mogąca przyjmować tylko dwie wartości liczbowe α_1 i α_2. Liczby α_1 lub α_2, uzyskane w momencie pomiaru obserwabli α, określają stan rozpatrywanego układu, będący jednym bitem klasycznej informacji uzyskanej przez człowieka wykonującego pomiar. Przed pomiarem stan układu oznaczony literą m był tylko zbiorem dwóch wykluczających się możliwości: możliwości m_1 odpowiadającej wartości α_1 obserwabli α i możliwości m_2 odpowiadającej wartości α_2 tej samej obserwabli. Zapiszemy to w postaci:

$$m = \{m_1, m_2\} , \qquad (1)$$

gdzie nawias klamrowy oznacza zbiór.

Załóżmy, że na przykład w wyniku pomiaru obserwabli α uzyskano wartość α_1, co symbolicznie zapiszemy w postaci strzałki

$$m = \{m_1, m_2\} \to m_1 . \qquad (2)$$

W momencie pomiaru obserwabli α zbiór dwóch możliwości $\{m_1, m_2\}$ został skokowo zredukowany do jednej możliwości – m_1. Nastąpiła więc skokowa zmiana stanu układu – ze stanu m do stanu m_1, co symbolicznie przedstawia właśnie strzałka.

Gdyby stan fizyczny rozpatrywanego układu był określony tylko przez wartość obserwabli α, to nie istniałaby możliwość dalszych zmian stanu tego obiektu. W ten sposób człowiek wykonujący pomiar nie miałby możliwości wyboru ani działania odnośnie tego układu. Aby istniała taka możliwość, zmuszeni jesteśmy przyjąć, że jego stan określa nie tylko wartość obserwabli α, lecz również wartość jeszcze jednej obserwabli β. Dla prostoty zakładamy, że obserwabla β może także przyjmować tylko dwie wartości β_1 i β_2. Zatem stan m_1 może być zbiorem dwóch możliwości: m_1' (odpowiadającej wartości β_1) i możliwości m_2' (odpowiadającej wartości β_2). Przyjmijmy, że w wyniku pomiaru obserwabli β, układu znajdującego się w stanie m_1, uzyskano wynik β_2. Przy takich założeniach wyrażenie (2) przyjmuje postać:

$$m = \{m_1, m_2\} \to m_1 = \{m_1', m_2'\} \to m_2' . \qquad (3)$$

Dla prostoty zakładamy, że stan rozpatrywanego obiektu określa w pełni znajomość tylko tych dwóch obserwabli α i β. Aby istniała permanentna możliwość zmiany stanu rozpatrywanego układu, musimy przyjąć, że możliwość m_2' wyraża się z kolei jako zbiór możliwości $\{m_1,m_2\}$. Wyrażenie określające historię tego układu przyjmie więc formę nie kończącego się łańcucha pomiarów, na przykład takiego:

$$
\begin{aligned}
&m = m_1' = \{m_1, m_2\} \rightarrow m_1 = \{m_1', m_2'\} \\
&\rightarrow m_2' = \{m_1, m_2\} \rightarrow m_2 = \{m_1', m_2'\} \rightarrow m_1' = \ldots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Każda więc z możliwości wzajemnie wykluczających się występująca w wyrażeniu (4) może być przedstawiona jako zbiór dwóch innych wykluczających się możliwości. Z tego powodu wszystkie możliwości muszą być reprezentowane przez obiekty matematyczne o tych samych właściwościach.

3.2. Liniowa superpozycja możliwości

Zbiory możliwości $\{m_1, m_2\}$ i $\{m_1', m_2'\}$ to zbiory możliwości wzajemnie wykluczających się. Powstaje pytanie: jak najprościej opisać ten fakt matematycznie? W matematyce najczęściej sytuacje wzajemnie wykluczające się modeluje się, wprowadzając obiekty geometryczne spełniające warunek prostopadłości, który na przykład oznacza, że nie można jednocześnie poruszać się dokładnie poziomo i dokładnie pionowo. Warunek ten w matematyce nazywa się warunkiem ortogonalności i określa się go, definiując tzw. iloczyn skalarny. Iloczyn skalarny dwóch możliwości m_1 i m_2 oznaczymy symbolem $m_1 \cdot m_2$. Zakładamy, że iloczyny skalarne różnych możliwości wykluczających się są równe zero (są ortogonalne, czyli wzajemnie wykluczające się), a iloczyn skalarny jednakowych możliwości jest równy 1.

Okazuje się jednak, że takie określenie iloczynu skalarnego możliwości jest niewystarczające do pełnego opisu procesu pomiaru obserwabli α i β (co wykazano w Dodatku). Oprócz symbolu możliwości *m* musimy wprowadzić również symbol możliwości sprzężonej (dualnej) $\overline{m}$ określonej jako

$$
(zm)^* = z^* \overline{m}, \tag{5}
$$

gdzie *z* jest dowolną liczbą zespoloną, a gwiazdka (*) oznacza sprzężenie w sensie liczb zespolonych. Uogólniony iloczyn skalarny możliwości zapisujemy jako $\overline{m} \cdot m$ i zakładamy, że spełnia on następujące relacje:

$$
\begin{aligned}
&\overline{m} \cdot m \geq 0, \ \overline{m} \cdot m' = (\overline{m'} \cdot m)^*, \\
&\overline{m} \cdot (z_1 m' + z_2 m'') = z_1(\overline{m} \cdot m') + z_2(\overline{m} \cdot m''), \\
&\overline{(z_1 m' + z_2 m'')} \cdot m = z_1^*(\overline{m'} \cdot m) + z_2^*(\overline{m''} \cdot m),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

dla dowolnych możliwości m, m' i m'' oraz dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2.

Przy powyższych założeniach warunek wzajemnego wykluczania się możliwości m_1 i m_2 oraz m_1' i m_2' zapisujemy w postaci

$$
\begin{aligned}
&\overline{m}_j \cdot m_{j'} = \overline{m}_{j'} \cdot m_j = \delta_{j,j'} = \begin{cases} 1 \text{ dla } j = j' \\ 0 \text{ dla } j \neq j' \end{cases}, \\
&\overline{m}_j' \cdot m_{j'}' = \overline{m}_{j'}' \cdot m_j' = \delta_{j,j'} \quad (j, j' = 1,2).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Każda z możliwości występująca w wyrażeniu (4) może być przedstawiona jako zbiór dwóch innych możliwości. Z tego powodu wszystkie możliwości muszą być reprezentowane przez obiekty matematyczne o tych samych właściwościach matematycznych. Załóżmy więc, że każdą z możliwości możemy przedstawić zgodnie z wyrażeniem (5) jako analityczną funkcję odpowiednich innych możliwości:

$$\begin{aligned}
m_1' &= f_1\,(m_1, m_2), \quad \overline{m}_1' = f_1^*\,(\overline{m}_1, \overline{m}_2),\\
m_2' &= f_2\,(m_1, m_2), \quad \overline{m}_2' = f_2^*\,(\overline{m}_1, \overline{m}_2),\\
m_1 &= g_1\,(m_1', m_2'), \quad \overline{m}_1 = g_1^*\,(\overline{m}_1', \overline{m}_2'),\\
m_2 &= g_2\,(m_1', m_2'), \quad \overline{m}_2 = g_2^*\,(\overline{m}_1', \overline{m}_2'),
\end{aligned} \tag{8}$$

gdzie f_1, f_2, g_1 i g_2 są analitycznymi zespolonymi funkcjami dwóch zmiennych będących odpowiednimi możliwościami. Rozwijając w szereg potęgowy funkcje $f_1, \overline{f}_1, f_2$ i $\overline{f}_2$ uzyskujemy:

$$\begin{aligned}
m_j' &= A_j + B_j m_1 + C_j m_2 + D_j m_1^2 + E_j m_2^2 + F_j m_1 m_2 + \ldots,\\
\overline{m}_j' &= A_j^* + B_j^* \overline{m}_1 + C_j^* \overline{m}_2 + D_j^* \overline{m}_1^2 + E_j^* \overline{m}_2^2 + F_j^* \overline{m}_1 \overline{m}_2 + \ldots,
\end{aligned} \tag{9}$$

gdzie $(j = 1, 2)$, a A_j, B_j, ... są pewnymi zespolonymi współczynnikami liczbowymi wynikającymi z rozwinięcia w szereg potęgowy tych funkcji.

Z jednego z warunków (7), a mianowicie z warunku

$$\overline{m}_j' \cdot m_j' = 1, \tag{10}$$

i po podstawieniu do niego szeregu (9) wynika, że

$$A_j = D_j = E_j = F_j = \ldots = 0, \tag{11}$$

$$B_j^* B_j + C_j^* C_j = 1. \tag{12}$$

Postępując tak samo z pozostałymi funkcjami (8) określającymi możliwości m_1 i m_2, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
m_j' &= B_j m_1 + C_j m_2,\\
\overline{m}_j' &= B_j^* \overline{m}_1 + C_j^* \overline{m}_2,\\
m_j &= B_{2+j} m_1' + C_{2+j} m_2',\\
\overline{m}_j &= B_{2+j}^* \overline{m}_1' + C_{2+j}^* \overline{m}_2' \quad (j = 1,2).
\end{aligned} \tag{13}$$

Widzimy, że każda z możliwości wyraża się przez liniową zespoloną superpozycję dwóch innych wzajemnie wykluczających się możliwości. Jest to bardzo ważny rezultat, uzyskany przy wyjątkowo oszczędnych założeniach dotyczących obiektów geometrycznych opisujących możliwości uzyskania określonych wyników pomiarów.

3.3. Prawdopodobieństwa

Mnożąc skalarnie z lewej strony obustronnie pierwsze z równań (13) przez $\overline{m}_1$ i uwzględniając warunek (7), mamy

$$\overline{m}_1 \cdot m_j^{'} = B_j\,(\overline{m}_1 \cdot m_1) + C_j\,(\overline{m}_1 \cdot m_2) = B_j. \tag{14}$$

Mnożąc skalarnie pozostałe równania (13) przez inne odpowiednie możliwości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} m_j^{'} &= (\overline{m}_1 \cdot m_j^{'})m_1 + (\overline{m}_2 \cdot m_j^{'})m_2, \\ m_j &= (\overline{m}_1^{'} \cdot m_j)m_1^{'} + (\overline{m}_2^{'} \cdot m_j)m_2^{'} \end{aligned} \tag{15}$$

i wyrażenia sprzężone do nich. Następnie wykorzystując wzory (12) i (15), uzyskujemy

$$\begin{aligned} \left|\overline{m}_1 \cdot m_j^{'}\right|^2 + \left|\overline{m}_2 \cdot m_j^{'}\right|^2 &= 1, \\ \left|\overline{m}_1^{'} \cdot m_j\right|^2 + \left|\overline{m}_2^{'} \cdot m_j\right|^2 &= 1, \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie j = 1,2.

Wielkości występujące we wzorze (16) są nieujemne i spełniają wszystkie warunki wymagane od prawdopodobieństw. Z tego powodu można je utożsamić z prawdopodobieństwami:

$$\begin{aligned} p(m_j \to m_{j'}^{'}) &= \left|\overline{m}_j \cdot m_{j'}^{'}\right|^2, \\ p(m_j^{'} \to m_{j'}) &= \left|\overline{m}_j^{'} \cdot m_{j'}\right|^2, \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie $j, j^{'} = 1, 2$. Wzory (17) przedstawiają funkcjonały reprezentujące odpowiednie prawdopodobieństwa.

Wyrażenia (15) możemy przepisać w postaci:

$$\begin{aligned} m_j^{'} &= \left(m_1(\overline{m}_1\,\cdot) + m_2(\overline{m}_2\,\cdot)\right)m_j^{'}, \\ m_j &= \left(m_1^{'}(\overline{m}_1^{'}\,\cdot) + m_2^{'}(\overline{m}_2^{'}\,\cdot)\right)m_j. \end{aligned} \tag{18}$$

Stąd widać, że

$$\sum_{j=1}^{2} m_j(\overline{m}_j\cdot) = 1$$

oraz (19)

$$\sum_{j=1}^{2} m_j^{'}(\overline{m}_j^{'}\cdot) = 1.$$

Wzory (19) oznaczają tzw. warunki zupełności rozwinięć (15).

3.4. Wartość oczekiwana obserwabli i operatory

Wartość oczekiwaną obserwabli α w stanie opisywanym przez możliwość m_1' określa znane z rachunku prawdopodobieństwa wyrażenie:

$$\overline{\alpha}_{m_1'} = p\,(m_1' \rightarrow m_1)\,\alpha_1 + p\,(m_1' \rightarrow m_2)\,\alpha_2, \tag{20}$$

które po uwzględnieniu wzorów (17) i (19) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_{m_j'} &= (\overline{m}_1' \cdot m_1)(\overline{m}_1 \cdot m_1')\,\alpha_1 + (\overline{m}_1' \cdot m_2)(\overline{m}_2 \cdot m_1')\,\alpha_2 \\ &= (\overline{m}_1' \cdot \hat{\alpha})\left(\sum_{j=1}^{2} m_j (\overline{m}_j \cdot)\right) m_1' = \overline{m}_1' \cdot \hat{\alpha} m_1',\end{aligned} \tag{21}$$

gdzie wprowadzono pojęcie operatora $\hat{\alpha}$ odpowiadającego obserwabli α, działającego na zbiorze możliwości mającego – z powodu relacji (13) – strukturę liniowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb zespolonych. Operator ten definiuje równanie

$$\hat{\alpha} m_j = \alpha_j m_j \qquad (j = 1{,}2), \tag{22}$$

które nosi nazwę równania własnego operatora $\hat{\alpha}$. Liczby α_j noszą nazwę wartości własnych operatora $\hat{\alpha}$ oraz m_j spełniające to równanie nazywa się możliwościami własnymi tego operatora. W końcu zbiór $\{\alpha_j\}$ jest widmem operatora $\hat{\alpha}$. Określa on wszystkie dopuszczalne wartości liczbowe wyników pomiarów obserwabli α.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla obserwabli β uzyskujemy następujące wyrażenie na wartość oczekiwaną tej obserwabli w stanie określonym przez możliwość m_2:

$$\overline{\beta}_{m_2} = \overline{m}_2 \cdot \hat{\beta} m_2, \tag{23}$$

gdzie

$$\hat{\beta} m_j' = \beta_j m_j' \qquad (j = 1, 2)\,, \tag{24}$$

a $\hat{\beta}$ jest operatorem przyporządkowanym obserwabli β.

Udowodnimy teraz, że iloczyn operatorów $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ nie może być przemienny, tzn. że

$$\hat{\alpha}\hat{\beta} \neq \hat{\beta}\hat{\alpha}\,. \tag{25}$$

W tym celu podziałajmy operatorem $\hat{\beta}$ z lewej strony na równanie własne (22):

$$\hat{\beta}\hat{\alpha} m_j = \hat{\beta}\alpha_j m_j = \alpha_j \hat{\beta} m_j. \tag{26}$$

Przyjmując, że $\hat{\beta}\hat{\alpha} = \hat{\alpha}\hat{\beta}$, i wprowadzając oznaczenie

$$m_j'' = \hat{\beta} m_j\ , \tag{27}$$

uzyskujemy ze wzoru (26)

$$\hat{\alpha} m_j'' = \alpha_j m_j''. \tag{28}$$

Stąd widać, że zarówno możliwość m_j, jak i m_j'' spełniają to samo równanie dla identycznych wartości własnych. Zatem mogą różnić się tylko o stałą, którą oznaczymy przez β_j. Mamy więc

$$m_j'' = \beta_j m_j . \tag{29}$$

W takim przypadku łańcuch pomiarowy (4) kończyłby się na pomiarze

$$m_1' = \{m_1, m_2\} \to m_1 = m_1' \tag{30}$$

i człowiek nie miałby możliwości dokonywania dalszych działań. Zatem operatory $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ muszą spełniać relację (25).

3.5. Operatory samosprzężone

Dalsze ograniczenia na postać operatorów $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ wynikają z faktu, że wartości własne α_j i β_j, jako wielkości mierzalne, muszą być liczbami rzeczywistymi. Wykorzystując warunek (19), operator $\hat{\alpha}$ przepisujemy w następującej formie

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 1\hat{\alpha}1 = \sum_{j=1}^{2} m_j'(\overline{m}_j' \cdot)\, \hat{\alpha} \sum_{j'=1}^{2} m_{j'}'(\overline{m}_{j'}' \cdot) \\ &= \sum_{j=1}^{2} \sum_{j'=1}^{2} m_j'(\overline{m}_j' \cdot \hat{\alpha} m_{j'}')(\overline{m}_{j'}' \cdot). \end{aligned} \tag{31}$$

Zbiór wyrażeń $(\overline{m}_j' \cdot \hat{\alpha} m_{j'}')$ reprezentuje operator $\hat{\alpha}$ i może być przedstawiony w postaci macierzy

$$\tilde{\alpha} = \begin{Vmatrix} \overline{m}_1' \cdot \hat{\alpha} m_1', & \overline{m}_1' \cdot \hat{\alpha} m_2' \\ \overline{m}_2' \cdot \hat{\alpha} m_1', & \overline{m}_2' \cdot \hat{\alpha} m_2' \end{Vmatrix}. \tag{32}$$

Wykorzystując znaną z algebry procedurę, możemy obliczyć wartości własne α_j operatora $\hat{\alpha}$, obliczając wartości α, dla których zeruje się wyznacznik macierzy

$$\det \left(\tilde{\alpha} - \alpha \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \right) = 0 . \tag{33}$$

Wzór (33) przyjmuje postać równania kwadratowego ze względu na niewiadomą α o postaci:

$$\begin{aligned} &\alpha^2 - \alpha\,[(\overline{m}_1' \cdot \hat{\alpha} m_1') + (\overline{m}_2' \cdot \hat{\alpha} m_2')] \\ &+ (\overline{m}_1' \cdot \hat{\alpha} m_1')(\overline{m}_2' \cdot \hat{\alpha} m_2') - (\overline{m}_1' \cdot \hat{\alpha} m_2')(\overline{m}_2' \cdot \hat{\alpha} m_1') = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Łatwo zauważyć, że na to, aby α przyjmowały wartości rzeczywiste, wystarczy, aby spełniony był warunek:

$$\overline{m}_i' \cdot \hat{\alpha} m_j' = (\overline{m}_j' \cdot \hat{\alpha} m_i')^* \qquad (i, j = 1, 2), \tag{35}$$

tzn. żeby operator $\hat{\alpha}$ był operatorem samosprzężonym (hermitowskim). Wtedy bowiem wyróżnik równania kwadratowego (34) jest dodatni. Ogólnie warunek hermitowskości operatora $\hat{\alpha}$ zapisujemy jako

$$\overline{m} \cdot \hat{\alpha} m' = (\overline{m}' \cdot \hat{\alpha}^{+} m)^{*} \quad \text{i} \quad \hat{\alpha} = \hat{\alpha}^{+} \tag{36}$$

oraz podobnie dla operatora $\hat{\beta}$

$$\overline{m} \cdot \hat{\beta} m' = (\overline{m}' \cdot \hat{\beta}^{+} m)^{*} \quad \text{i} \quad \hat{\beta} = \hat{\beta}^{+}, \tag{37}$$

gdzie operatory $\hat{\alpha}^{+}$ i $\hat{\beta}^{+}$ nazywa się operatorami sprzężonymi odpowiednio z operatorami $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$.

3.6. Nierówność Robertsona

Zauważmy, że również operatory fluktuacji obserwabli α i β:

$$\Delta\hat{\alpha} := \hat{\alpha} - \overline{\alpha}_{m} \tag{38}$$

$$\Delta\hat{\beta} := \hat{\beta} - \overline{\beta}_{m} \tag{39}$$

są operatorami samosprzężonymi. Istotnie

$$\begin{aligned} \overline{m} \cdot \Delta\hat{\alpha} m' &= (\overline{m} \cdot \hat{\alpha} m') - \overline{\alpha}_{m} (\overline{m} \cdot m') = \\ &= (\overline{m}' \cdot \hat{\alpha} m)^{*} - \overline{\alpha}_{m} (\overline{m}' \cdot m)^{*} = (\overline{m}' \cdot \Delta\hat{\alpha} m)^{*}. \end{aligned} \tag{40}$$

Korzystając z jednego z warunków (6) mamy

$$\overline{m}' \cdot m' \geq 0. \tag{41}$$

Niech

$$m' = \hat{\delta} m, \tag{42}$$

gdzie $\hat{\delta}$ jest operatorem określonym jako

$$\hat{\delta} = x\Delta\hat{\alpha} + i\Delta\hat{\beta}, \tag{43}$$

a x jest pewnym rzeczywistym parametrem liczbowym oraz $i = \sqrt{-1}$.

Po podstawieniu (42) do (41) i skorzystaniu z warunku $(\overline{m}' \cdot \hat{\delta} m) = (\overline{m} \;\; \cdot \hat{\delta}^{+} m')^{*}$ otrzymujemy

$$\overline{m}' \cdot m' = (m' \cdot \hat{\delta} m) = (\overline{m} \cdot \hat{\delta}^{+} m')^{*} = (\overline{m} \cdot \hat{\delta}^{+} \hat{\delta} m)^{*} \geq 0. \tag{44}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \overline{m} \cdot \hat{\delta}^{+} \hat{\delta} m &= \left(\overline{m} \cdot (x\Delta\hat{\alpha} - i\Delta\hat{\beta})(x\Delta\hat{\alpha} + i\Delta\hat{\beta}) m\right) = \\ &= x^{2} \left(\overline{m} \cdot (\Delta\hat{\alpha})^{2} m\right) + ix \left(\overline{m} \cdot (\Delta\hat{\alpha}\Delta\hat{\beta} - \Delta\hat{\beta}\Delta\hat{\alpha}) m\right) + \\ &+ \overline{m} \cdot (\Delta\hat{\beta})^{2} m \geq 0, \end{aligned} \tag{45}$$

a z powodu dodatniej wartości wyrazu pierwszego i trzeciego tej nierówności, będzie ona spełniona, gdy

$$-\left(\overline{m} \cdot (\Delta\hat{\alpha}\Delta\hat{\beta} - \Delta\hat{\beta}\Delta\hat{\alpha}) m\right)^{2} - 4\left(\overline{m} \cdot (\Delta\hat{\alpha})^{2} m\right)\left(\overline{m} \cdot (\Delta\hat{\beta})^{2} m\right) \leq 0. \tag{46}$$

Po przekształceniach nierówność ta przyjmuje postać tzw. nierówności Robertsona

$$(\Delta\alpha_m)^2(\Delta\beta_m)^2 \geq -\frac{1}{4}\left(\overline{m}\cdot[\hat{\alpha},\hat{\beta}]_- m\right)^2, \tag{47}$$

gdzie

$$\Delta\alpha_m = \sqrt{\left(\overline{m}\cdot(\Delta\hat{\alpha})^2 m\right)} \tag{48}$$

i

$$\Delta\beta_m = \sqrt{\left(\overline{m}\cdot(\Delta\hat{\beta})^2 m\right)} \tag{49}$$

są odchyleniami standardowymi od wartości oczekiwanej w stanie, którym odpowiada możliwość m, odpowiednio obserwabli α i β. Symbol

$$[\hat{\alpha},\hat{\beta}]_- = \hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\beta}\hat{\alpha} \tag{50}$$

przedstawia komutator operatorów $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$.

W przypadku, gdy iloczyn operatorów $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ nie jest przemienny, prawa strona nierówności (47) jest różna od zera i komutator (50) musi być postaci

$$[\hat{\alpha},\hat{\beta}]_- = i\hat{\gamma}, \tag{51}$$

gdzie $\hat{\gamma}$ jest pewnym operatorem samosprzężonym $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^+$. Stąd wynika, że pomiar obserwabli α, który powoduje, że $\Delta\alpha_m = 0$, uniemożliwia predykcję wyniku pomiaru obserwabli β i na odwrót – pomiar β uniemożliwia predykcję wyniku pomiaru obserwabli α.

W ten sposób dochodzimy ponownie do wniosku, że nieprzemienność iloczynu operatorów $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ jest warunkiem niezbędnym, by człowiek miał permanentną, w określonych granicach, możliwość działania. Granice te są określone przez dopuszczalny zbiór możliwości.

Operator $\hat{\gamma}$ nie może być liczbą rzeczywistą, ponieważ z założenia żaden z operatorów $\hat{\alpha}$ lub $\hat{\beta}$ nie ma nieprzeliczalnego zbioru wartości własnych. Żeby człowiek wykonujący pomiary miał możliwość wyboru w dalszym działaniu odnośnie rozpatrywanego układu po wykonaniu danego pomiaru musi istnieć obserwabla γ, której przyporządkowany jest właśnie operator $\hat{\gamma}$. Dlatego stanu układu nie opisują tylko dwie obserwable α i β, jak zakładano poprzednio, lecz co najmniej trzy: α, β i γ. Przy założeniu, że tylko te trzy obserwable opisują właściwości rozpatrywanego układu, operator $\hat{\gamma}$ nie może być funkcją pozostałych operatorów i muszą być spełnione jeszcze dwie relacje komutacyjne (z dokładnością do stałej)

$$[\hat{\beta},\hat{\gamma}]_- = i\hat{\alpha}, \tag{52}$$

$$[\hat{\gamma},\hat{\alpha}]_- = i\hat{\beta}, \tag{53}$$

określające łącznie z (51) algebrę operatorów odpowiadających obserwablom rozpatrywanego układu.

Przyjmujemy dla prostoty, że podobnie jak operatory $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ operator $\hat{\gamma}$ spełnia równanie własne o postaci

$$\hat{\gamma}m_j^{''} = \gamma_j m_j^{''}, \tag{54}$$

gdzie j = 1, 2 oraz

$$\overline{m}_j^{''} \cdot m_{j'}^{''} = \delta_{j,j'} \tag{55}$$

i

$$\sum_{j=1}^{2} m_j^{''}(\overline{m}_j^{''}\,\cdot) = 1. \tag{56}$$

W ten sposób zbiór możliwości m_j i $m_j^{'}$ zostaje rozszerzony o możliwości $m_j^{''}$. Jest to bardzo interesujący rezultat, który oznacza, że nie tylko przyroda „decyduje" o wyniku pomiaru, lecz również ludzie zawsze mają możliwość wyboru pomiaru jednej z co najmniej dwóch obserwabli, dla których niemożliwa jest dokładna predykcja spodziewanego rezultatu pomiaru.

Zgodnie z wyrażeniem (2) i wzorami (15) proces pomiaru obserwabli α układu, którego stan opisuje możliwość $m_1^{'}$, przedstawia relacja

$$m_1^{'} = \sum_{j=1}^{2} (\overline{m}_j \cdot m_1^{'}) m_j \to m_1 \text{ lub } m_2 \tag{57}$$

albo relacja dualna

$$\overline{m}_1^{'} = \sum_{j=1}^{2} (\overline{m}_1^{'} \cdot m_j) \overline{m}_j \to \overline{m}_1 \text{ lub } \overline{m}_2, \tag{58}$$

a proces pomiaru obserwabli γ naszego układu w tym stanie – reprezentują wyrażenia

$$m_1^{'} = \sum_{j=1}^{2} \left(\overline{m}_j^{''} \cdot m_1^{'}\right) m_j^{''} \to m_1^{''} \text{ lub } m_2^{''}, \tag{59}$$

$$\overline{m}_1^{'} = \sum_{j=1}^{2} \left(\overline{m}_1^{'} \cdot m_j^{''}\right) \overline{m}_j^{''} \to \overline{m}_1^{''} \text{ lub } \overline{m}_2^{''}. \tag{60}$$

W ten sposób skonstruowany został formalizm matematyczny opisujący proces pomiaru wielkości fizycznych. Dla prostoty rozpatrywaliśmy układ scharakteryzowany tylko przez trzy obserwable α, β i γ, z których każda może przyjmować dwie wartości.

Zauważmy, że rozpatrzony układ jest najprostszym z możliwych układem fizycznym, zgodnym z rozszerzoną zasadą antropiczną. Warto podkreślić, że taki układ opisuje realną sytuację fizyczną. Przedstawia on układ o spinie s = ½, dla którego pominięto wszystkie inne właściwości poza właśnie spinem. Jest to przykład najprostszego tzw. modelu spinowego, o jednym swobodnym spinie, rozpatrywanego w jednostkach fizycznych, dla których zredukowana stała Plancka $\hbar = 1$. Oczywiście formalizm ten może być uogólniony na dowolny izolowany układ fizyczny.

3.7. Notacja Diraca

Otrzymany formalizm matematyczny jest identyczny z podstawową strukturą teorii kwantowej. Żeby wyraźnie pokazać, że taka identyczność jest faktem, wprowadzamy notację zaproponowaną przez Diraca i powszechnie używaną w teorii kwantów. Oznaczmy możliwość

$$m = |\Psi\rangle, \tag{61}$$

gdzie $|\Psi\rangle$ nazywa się wektorem stanu „ket", a

$$\overline{m} = \langle\Psi|. \tag{62}$$

$\langle\Psi|$ - wektorem stanu „bra". Wtedy równania własne (22) dla operatora $\hat{\alpha}$ mogą być zapisane w postaci

$$\hat{\alpha}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{63}$$

lub

$$\langle\alpha|\hat{\alpha} = \langle\alpha|\,\alpha \tag{64}$$

a warunek ortonormalności (7) (przy założeniu, że $\overline{m}\cdot m' = \langle\Psi|\cdot|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Psi\rangle$)

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle = \delta_{a,a'}$$

i warunek zupełności (19)

$$\sum_a |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1\,. \tag{65}$$

Wzór (21) na wartość oczekiwaną obserwabli α, której odpowiada operator hermitowski $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}^+$, w stanie $|\Psi\rangle$ przyjmuje postać

$$\overline{\alpha}_\Psi = \langle\hat{\alpha}\rangle_\Psi = \langle\Psi|\,\hat{\alpha}\,|\Psi\rangle. \tag{66}$$

Nierówności Robertsona (47) wyrażające relacje nieoznaczoności Heisenberga w notacji Diraca można zapisać jako

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_\Psi\Delta\beta_\Psi &\geq \frac{1}{2}\left|\langle\hat{\gamma}\rangle_\Psi\right|, \\ \Delta\beta_\Psi\Delta\gamma_\Psi &\geq \frac{1}{2}\left|\langle\hat{\alpha}\rangle_\Psi\right|, \\ \Delta\gamma_\Psi\Delta\alpha_\Psi &\geq \frac{1}{2}\left|\langle\hat{\beta}\rangle_\Psi\right|, \end{aligned} \tag{67}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_\Psi &= \sqrt{\langle\Psi|(\Delta\hat{\alpha})^2|\Psi\rangle}\,, \\ \Delta\beta_\Psi &= \sqrt{\langle\Psi|(\Delta\hat{\beta})^2|\Psi\rangle}\,, \\ \Delta\gamma_\Psi &= \sqrt{\langle\Psi|(\Delta\hat{\gamma})^2|\Psi\rangle}\,, \end{aligned} \tag{68}$$

oraz

$$\Delta\hat{\gamma} := \hat{\gamma} - \langle\hat{\gamma}\rangle_{\Psi} \,. \tag{69}$$

Z kolei proces pomiaru obserwabli α układu w stanie $|\Psi\rangle$ przedstawiają relacje:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha}\langle\alpha|\Psi\rangle|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha'\rangle \tag{70}$$

lub

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha}\langle\Psi|\alpha\rangle\langle\alpha| \rightarrow \langle\alpha'| \,. \tag{71}$$

wynikające z wzorów (57) i (58).

Ze względu na możliwość wyrażenia każdego wektora stanu przez liniową zespoloną superpozycję stanów własnych, jak we wzorach (70), (71), wszystkie operatory obserwabli działające w liniowej przestrzeni wektorów stanów muszą spełniać warunek liniowości zwany zasadą superpozycji stanów:

$$\hat{\beta}\left(z_1|\Psi_1\rangle + z_2|\Psi_2\rangle\right) = z_1\hat{\beta}\,\langle\Psi_1| + z_2\hat{\beta}\,|\Psi_2\rangle \,, \tag{72}$$

dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2 oraz dowolnych wektorów stanu $|\Psi_1\rangle$ i $|\Psi_2\rangle$.

W końcu wzór na prawdopodobieństwo uzyskania w wyniku pomiaru obserwabli α wartości α' dla układu w stanie $|\Psi\rangle$, zgodnie z wzorami (17), przyjmuje postać postulatu Borna

$$p\left(|\Psi\rangle \rightarrow |\alpha'\rangle\right) = \left|\langle\alpha'|\Psi\rangle\right|^2. \tag{73}$$

4. Wnioski

Wzory postaci (61) – (73) stanowią podstawową strukturę formalizmu matematycznego dowolnej realizacji teorii kwantowej. Na tej podstawie stwierdzamy, że rozszerzona zasada antropiczna uzasadnia:

- ścisłą liniowość teorii kwantowej, wyrażonej wzorem (70),
- wzór (73), czyli związek wektorów stanu, które określają zbiór możliwych wyników pomiarów, z prawdopodobieństwem ich otrzymania,
- konieczność reprezentowania obserwabli nie przez liczby, lecz samosprzężone liniowe operatory (72) działające w przestrzeni stanów,
- wzór (63), czyli związek operatorów z wartościami liczbowymi obserwabli uzyskiwanymi w eksperymencie,
- występowanie w teorii kwantowej relacji nieoznaczoności (67).

Otrzymane wzory postaci (61) – (73) istotnie tworzą podstawową strukturę formalizmu matematycznego dowolnego działu teorii kwantowej. Nie określają one jednak wyrażeń opisujących oddziaływania w dowolnym układzie fizycznym, w którym może występować dowolna liczba obserwabli, ponieważ rozpatrywaliśmy najprostszy układ fizyczny, bez oddziaływań. Wzory te nie zawierają również wyrażeń określających ewolucję konkretnego układu fizycznego, które, według kosmologii kwantowej, wynikają z dotychczasowej historii wszechświata, począwszy od jego kwantowej kreacji (Jacyna-Onyszkiewicz, 2012).

Gdy w przyszłości okaże się, że konieczna jest zmiana wyprowadzonych podstaw teorii kwantowej, to będzie oznaczać, że rozszerzona zasada antropiczna nie jest fundamentalną zasadą teorii kwantowej. W przeciwnym przypadku zasady teorii kwantowej pozostaną podstawą wszystkich przyszłych teorii fizycznych. O tym może świadczyć fakt, że mimo wysiłku wielu wybitnych fizyków, którzy zawsze próbują ulepszać swoje teorie, dotąd nie udało się znaleźć żadnego sposobu, aby nieco zmienić podstawową strukturę teorii kwantowej, nie powodując przy tym katastrofy logicznej (Weinberg, 1995). Jest to symptomatyczne, ponieważ większość teorii fizycznych można bez większego trudu nieco zmodyfikować.

Dodatek. Konieczność wprowadzenia uogólnionego iloczynu skalarnego

Załóżmy, że iloczyn skalarny dwóch możliwości m_1 i m_2 określany symbolem $m_1 \cdot m_2$ zamiast relacji (5) spełnia warunek

$$(\gamma m)^* = \gamma m, \tag{D1}$$

gdzie γ jest dowolną liczbą rzeczywistą. Relacje (6) przyjmują teraz postać

$$\begin{gathered} m \cdot m \geq 0,\ m \cdot m' = m' \cdot m, \\ m \cdot (\gamma_1 m' + \gamma_2 m'') = \gamma_1 (m \cdot m') + \gamma_2 (m \cdot m''), \end{gathered} \tag{D2}$$

dla dowolnych m, m' i m'' oraz dowolnych liczb rzeczywistych γ_1 i γ_2. Przy tych założeniach warunek wzajemnego wykluczania się możliwości (7) możemy zapisać jako

$$\begin{gathered} m_j \cdot m_{j'} = m_{j'} \cdot m_j = \delta_{j,j'}, \\ m'_j \cdot m'_{j'} = m'_{j'} \cdot m'_j = \delta_{j,j'}, \end{gathered} \tag{D3}$$

a wzór (15) przybiera formę

$$\begin{gathered} m'_j = (m_1 \cdot m'_j) m_1 + (m_2 \cdot m'_j) m_2, \\ m_j = (m'_1 \cdot m_j) m'_1 + (m'_2 \cdot m_j) m'_2. \end{gathered} \tag{D4}$$

Z kolei wzór (34), określający wartości własne α, ma postać równania kwadratowego

$$\begin{gathered} \alpha^2 - \alpha[(m'_1 \cdot \hat{\alpha} m'_1) + (m'_2 \cdot \hat{\alpha} m'_2)] \\ + (m'_1 \cdot \hat{\alpha} m'_1)(m'_2 \cdot \hat{\alpha} m'_2) - (m' \cdot \hat{\alpha} m'_2)(m'_2 \cdot \hat{\alpha} m'_1) = 0. \end{gathered} \tag{D5}$$

Na to, aby wartości własne α były rzeczywiste, potrzeba i wystarcza warunek

$$m'_1 \cdot \hat{\alpha} m'_2 = m'_2 \cdot \hat{\alpha} m'_1 = \hat{\alpha} m'_1 \cdot m'_2. \tag{D6}$$

Operator $\hat{\alpha}$ spełniający ten warunek nazywa się operatorem symetrycznym.

Zgodnie z wzorem (25) iloczyn operatorów $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ nie może być przemienny. Dla operatorów symetrycznych wyrażenie (51) przyjmuje postać

$$[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]_{-} = \hat{\gamma}\,, \tag{D7}$$

gdzie symetryczny operator $\hat{\gamma}$ nie może być liczbą rzeczywistą, ponieważ z założenia operatory $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ mają przeliczalne widmo wartości własnych. Operator $\hat{\gamma}$ nie może być także funkcją operatorów $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$. Przy założeniu, że tylko trzy obserwable, którym odpowiadają operatory symetryczne $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ i $\hat{\gamma}$ opisują w pełni układ, muszą być spełnione – z dokładnością do stałej – jeszcze dwie relacje komutacyjne

$$[\hat{\beta}, \hat{\gamma}]_{-} = \hat{\alpha}\,, \tag{D8}$$

$$[\hat{\gamma}, \hat{\alpha}]_{-} = \hat{\beta}\,. \tag{D9}$$

Wartości oczekiwane symetrycznych operatorów $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ i $\hat{\gamma}$ wynoszą zero, co oznacza, że nie istnieją operatory symetryczne spełniające reguły komutacyjne (D7) – (D9). Stąd wynika, że nieuogólniony iloczyn skalarny spełniający relacje (D2) nie może być podstawą opisu procesu podejmowania decyzji odnoszących się do zjawisk fizycznych. Z tego właśnie powodu w formalizmie matematycznym teorii kwantów muszą pojawiać się liczby zespolone i nie wystarczają tylko liczby rzeczywiste. Dlatego też przestrzeń stanów w teorii kwantów jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych.

Bibliografia

Jacyna-Onyszkiewicz, Z. (2012), *Quantum Cosmogenesis.* Bayreuth: The Uni-Publications.

Jacyna-Onyszkiewicz, Z. (2015), *Akosmizm.* Poznań: Wydawnictwo Agape.

Leciejewski, S. (2007), *Rola zasad antropicznych w rozwoju współczesnej kosmologii.* Poznań: Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM.

Weinberg, S. (1995), *Sen o teorii ostatecznej.* Warszawa: Wydawnictwo Alkazar.

Abstract

A Fundamental Principle of Quantum Theory

In contrast to the general theory of relativity, the quantum theory has not been formulated on the basis of one fundamental principle. Its mathematical structure was inferred in the 1920s on the basis of experiments performed in the atomic scale. However, the question if the mathematical structure of the quantum theory follows from one fundamental principle remains still open. In this paper, the extended anthropic principle has been proposed to be considered as such a fundamental principle. On the basis of this anthropic approach, the basic structure of mathematical formalism of quantum theory is derived.

Nota o autorze:

Zbigniew Jacyna-Onyszkiewicz – prof. dr hab., profesor zwyczajny w Zakładzie Fizyki Kwantowej na Wydziale Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu oraz doktor honoris causa Bałtyckiego Federalnego Uniwersytetu im. Immanuela Kanta w Królewcu. Autor ponad 130 prac naukowych oraz 11 książek z zakresu fizyki teoretycznej oraz fundamentalnych problemów fizyki kwantowej i kosmologii kwantowej. Pięciokrotnie na zaproszenie i w obecności św. Jana Pawła II wygłaszał referaty na interdyscyplinarnych seminariach w Castel Gandolfo. Otrzymał Złoty Krzyż Zasługi (1988), Medal Edukacji Narodowej (1995) i tytuł Honorowego Obywatela Miasta Kcynia (2003). Radny Sejmiku Województwa Wielkopolskiego (2002-2004). Poseł na Sejm RP IV kadencji i Członek Rady Naukowej Wyższej Szkoły Kultury Społecznej i Medialnej w Toruniu.